

2026 年全国统一高考数学试卷（新高考I）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 样本数据 6, 8, 4, 5, 12 的中位数为 ()

- A. 5 B. 6 C. 8 D. 9

【分析】将给定的五个数据按从小到大的次序排列，处在第三位的那个数就是这组数据的中位数.

【解答】详细求解过程如下：将样本从小到大排列：4, 5, 6, 8, 12,

所以中位数为 6.

故选：B.

【知识点】该题检测数据排序与中位数基本概念的掌握程度，属于基础计算题型.

2. (5 分) 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线，且 $2\vec{a} + y\vec{b} = x\vec{a} - 3\vec{b}$ ，则 ()

- A. $x=2, y=-3$ B. $x=-2, y=3$ C. $x=2, y=3$ D. $x=-2, y=-3$

【分析】对于两个不共线的向量，若它们的线性组合相等，移项后各系数必然均为零，据此列出方程组即可解出 x 与 y .

【解答】依题目所给信息可得：详细求解过程如下：鉴于 $2yx3$ ，这是我们接下来分析的出发点。

所以 $(2-x)\vec{a} = (-3-y)\vec{b}$,

因为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线,

所以 $2-x = -3-y = 0$,

所以 $x=2, y=-3$.

故选：A.

【知识点】该题考核平面向量基本定理的核心推论——不共线向量线性组合为零的充要条件是系数全为零，属入门级题目.

3. (5 分) 已知集合 $A = \{\sin\frac{7\pi}{6}, \cos\frac{5\pi}{3}, \tan\frac{5\pi}{4}\}$, $B = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\}$ B. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}$
C. $\{-\frac{1}{2}, 1\}$ D. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\}$

【分析】逐一计算 $\sin$ 、 $\cos$ 和 $\tan$ 的精确数值以确定集合 A 的具体元素，再找出同时出现在集合 B 中的

元素作为交集.

【解答】由前一步的结论可知：详细求解过程如下： $A=\{\sin, \cos, \tan\}=\{\cdot, \cdot, 1\}$ ，此结论对后续步骤至关重要。

所以 $A \cap B = \{-\frac{1}{2}, 1\}$.

故选：C.

【知识点】该题将特殊角三角比的精确值计算与集合交集运算有机结合，难度为基本级别.

4. (5分) 曲线 $y=5x+8\ln x$ 在点 (1, 5) 处的切线方程为 ()

A. $y=3x+2$ B. $y=5x$ C. $y=8x-3$ D. $y=13x-8$

【分析】对曲线方程求导后，将切点横坐标 $x=1$ 代入导函数获得切线斜率，再运用点斜式写出切线方程.

【解答】我们首先观察到，详细求解过程如下： $y' = 5$ ，此结论对后续步骤至关重要。

所以 $x=1$ 时， $y' = 5+8=13$,

所以切线方程斜率为 13,

设切线方程为 $y=13x+b$ ，则 $5=13+b$,

所以 $b=-8$,

所以切线方程为 $y=13x-8$.

故选：D.

【知识点】该题检测导数几何意义——曲线在某点的切线斜率即为该点导数值——的直接运用，属基础运算题.

5. (5分) 已知抛物线 $C_1: y^2=2p_1x$ ($p_1>0$) 和 $C_2: x^2=2p_2y$ ($p_2>0$) 均经过点 (4, 8)，则 C_1 的焦点与 C_2 的焦点之间的距离为 ()

A. 12 B. $4\sqrt{5}$ C. 6 D. $\frac{\sqrt{65}}{2}$

【分析】将已知点坐标(4,8)分别代入两抛物线方程以确定参数 p_1 与 p_2 ，进而求出两焦点的具体坐标，最后利用两点间距离公式计算.

【解答】详细求解过程如下：鉴于抛物线 $C_1: y^2=2p_1x$ ($p_1>0$) 和 $C_2: x^2=2p_2y$ ($p_2>0$) 均经过点 (4, 8),

所以 $64=8p_1$, $16=16p_2$, 所以 $p_1=8$, $p_2=1$,

所以 C_1 的焦点与 C_2 的焦点分别为 (4, 0), (0, $\frac{1}{2}$),

所以 C_1 的焦点与 C_2 的焦点之间的距离为 $\frac{\sqrt{65}}{2}$.

故选：D.

【知识点】该题考核抛物线标准方程中参数 p 与焦点坐标之间的换算关系，属于基础计算题.

6. (5 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{e^x+a}$ 的最大值为 1，则 $a =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【分析】函数在最大值点处需满足两个必要条件：导数等于零，且函数值等于题目给定的最大值 1；联立这两个方程即可求出 x_0 与参数 a .

【解答】按照定义展开计算：详细求解过程如下： $f'(x)$ ，这一步是后续推导的基础。

令 $x=x_0$ 时， $f(x)$ 有最大值 1，

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{x_0+2}{e^{x_0}+a} = 1 \\ \frac{-(x_0+1)e^{x_0}+a}{(e^{x_0}+a)^2} = 0 \end{cases},$$

整理得： $x_0+2 = (x_0+2) e^{x_0}$,

所以 $x_0+2=0$ 或 $e^{x_0} = 1$,

所以 $x_0 = -2$ 或 $x_0=0$,

当 $x_0 = -2$ 时， $f(-2) = 0$ ，不符合题意；

所以 $x_0=0$,

所以 $a=1$,

$$\text{所以} f'(x) = \frac{-(x+1)e^x+1}{(e^x+1)^2},$$

因为 $(e^x+1)^2 > 0$ ，令 $g(x) = 1 - (x+1)e^x$,

所以 $g'(x) = -e^x - (x+1)e^x = -(x+2)e^x$,

因为 $e^x > 0$,

所以当 $x > -2$ 时， $g(x)$ 单调递减， $x < -2$ 时， $g(x)$ 单调递增，

因为 $x < -1$ 时 $g(x) > 0$ 恒成立，

所以当 $x > 0$ 时， $g(x) < 0$ ，当 $x < 0$ 时， $g(x) > 0$ ，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的最大值，符合题意，

综上， $a=1$.

故选：B.

【知识点】该题要求通过分析导函数的符号变化来确定原函数的单调区间和极值点，进而判断全局最值，解题过程涉及较复杂的代数变形，属高难度题型.

7. (5 分) 一百零八塔位于宁夏回族自治区青铜峡市，以其独特的建筑格局和深远的历史文化闻名遐迩，该

塔群共有 108 座塔，依山势自上而下排成 12 行，将第 i 行中塔的座数记为 a_i ($i=1, 2, \dots, 12$)，其中 $a_1=1, a_2=a_3=3, a_4=a_5=5$ ，且 $a_6, a_7, \dots, a_{12}$ 是一个首项为 7，公差为 2 的等差数列。将 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ 分为 6 组，每组 2 个数，使得每组的 2 个数之和可构成一个项数为 6 且公差为 d ($d>0$) 的等差数列，则 $d=$ ()

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

【分析】先汇总前五座塔的座数，利用总塔数 108 推得新等差数列 $\{b_n\}$ 的前六项和，由此建立关于首项 b_1 与公差 d 的方程；再根据 b_n 必须为偶数及 $b_1>0$ 的约束限制 d 的可能取值。

【解答】详细求解过程如下：依题意不难发现， $1+3+3+5+5+7 \times 2 = 108$ ，
设每组的 2 个数之和可构成的等差数列为 $\{b_n\}$ ，前 n 项和为 S_n ，

因为 $S_6=108$ ，

所以 $b_1+b_6=b_2+b_5=b_3+b_4=108 \div 3=36$ ，

所以 $2b_1+5d=36$ ，

所以 d 为偶数，

所以 $b_1=18-\frac{5}{2}d$ ，

因为 a_i 为奇数，

所以 b_n 为偶数，

所以 d 是 4 的倍数，

因为 $b_1>0$ ，

所以 $d<\frac{36}{5}<8$ ，

所以 $d=4$ 。

故选：B。

【知识点】该题以一百零八塔这一文化遗迹为背景铺设数列情境，在求和新数列公差的过程中需综合运用整除性分析和数列性质，属于融合了数学建模思想的高难度综合题。

8. (5 分) 设 $U=\{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \{-2, -1, 1, 2\}, i=1, 2, 3\}$ 为空间中 64 个点构成的集合。点 $P(1, 1, 1)$ ，记样本空间 $\Omega=\mathcal{C}_U\{P\}$ ，从 Ω 中随机取一个点。定义随机变量 X 如下：对 Ω 中的每个点 $A(x_1, x_2, x_3)$ ，令 $X(A)=x_1+x_2+x_3$ ，则 X 的数学期望为 ()

- A. $-\frac{1}{21}$ B. $-\frac{1}{63}$ C. 0 D. $\frac{1}{7}$

【分析】集合 U 中的 64 个点关于原点完全对称分布，因此所有点的三个坐标各自的和均为零；从 U 中挖去点 $P(1,1,1)$ 后得到 Ω ，利用对称性即可求得 Ω 中全部点的 x 坐标总和，除以样本数 $|\Omega|=63$ 便得到期望

值.

【解答】依题目所给信息可得：详细求解过程如下：∵ $U = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{-2, -1, 1, 2\}, i = 1, 2, 3\}$ ，这是我们接下来分析的出发点。

∴ U 内元素个数为 $4^3 = 64$ 个，且一定存在点 $A' = (-x_1, -x_2, -x_3) \in U$ ， A 与 A' 关于原点对称，

∴ $X(A) + X(A') = 0$,

∴ U 内， $\sum_U X(A) = 0$,

∴ $\Omega = C_{UP}$,

∴ $\sum_{\Omega} X(A) = \sum_U X(A) - X(P) = 0 - (1+1+1) = -3$,

∴ $E(X) = \frac{\sum_{\Omega} X(A)}{63} = -\frac{1}{21}$.

故选：A.

【知识点】该题巧妙借助空间点集的对称性来化简随机变量期望的计算，考核了对期望定义本质的理解以及对称性的灵活运用，难度为中等.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

(多选) 9. (6 分) 设 $z = 3 + 2i$ ，则 ()

- A. $\bar{z} = 3 - 2i$ B. $|z| = 5$ C. $z^2 = 5 + 12i$ D. $\frac{z+3}{z-i} \in \mathbf{R}$

【分析】由 $z = 3 + 2i$ 依次算出它的共轭、模长 $|z|$ 、平方值 z^2 以及 z 除以其共轭的商，逐项与四个选项比对即可判断正误.

【解答】依题目所给信息可得：详细求解过程如下：鉴于 $z = 3 + 2i$ ，这是我们接下来分析的出发点。

所以 $\bar{z} = 3 - 2i$ ， $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ ，故 A 正确，B 错误，

所以 $z^2 = 9 - 4 + 12i = 5 + 12i$ ，故 C 正确，

所以 $\frac{z+3}{z-i} = \frac{6+2i}{3+i} = \frac{(6+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{18+2+6i-6i}{9+1} = 2 \in \mathbf{R}$ ，故 D 正确.

故选：ACD.

【知识点】该题围绕一个给定复数依次检验其共轭、模长、平方及除以其共轭的商，全面考核复数四则运算的基本技能，属简单题型.

(多选) 10. (6 分) 在空间中， A, B 为两个定点，动点 C 到直线 AB 的距离为 2，动点 D 到直线 AB 的距离为 1. 若二面角 $C-AB-D$ 为 60° ，则 ()

A. $\angle CAD \geq 60^\circ$

B. $CD \geq \sqrt{3}$

C. 当 $AB \perp CD$ 时, $CD \perp$ 平面 ABD

D. 当 $AB \perp$ 平面 ACD 时, $AC \perp AD$

【分析】以 A 为坐标原点、 AB 为 z 轴正向建立空间直角坐标系。由二面角条件知 C 、 D 在垂直于 AB 的平面上的投影射线夹角为 60° , 且两动点到 z 轴的距离分别为 2 和 1 ; 故 C 的参数坐标为 $(2, 0, z_1)$, D 的参数坐标为 $(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ, z_2)$ 即 $(1/2, \sqrt{3}/2, z_2)$ 。对四个选项逐一进行真伪判断。

【解答】详细求解过程如下: 依据题意, 以 A 为原点, AB 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 从二面角 $C-AB-D$ 为 60° , 且点 C 、 D 到 z 轴的距离分别为 2 和 1 ,

设 $C(2, 0, z_1)$, $D(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, z_2)$, 则 $A(0, 0, 0)$,

对于 A , 当 $z_1 = z_2 \rightarrow +\infty$ 时, 射线 AC , AD 均趋近于与 z 轴平行, 此时 $\angle CAD \rightarrow 0^\circ$, 说明 $\angle CAD \geq 60^\circ$ 不成立, 选项 A 错误;

对于 B , $CD = \sqrt{(\frac{1}{2} - 2)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} - 0)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{3 + (z_2 - z_1)^2} \geq \sqrt{3}$, 当 $z_1 = z_2$ 时 CD 取得最小值 $\sqrt{3}$, 选项 B 正确;

对于 C , 当 $AB \perp CD$ 时, $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$, 不妨设 $\vec{AB} = (0, 0, 1)$, 得 $\vec{CD} = (-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$,

平面 ABD 由 z 轴和点 D 确定, 设该法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \end{cases}$,

令 $x = \sqrt{3}$, 得 $y = -1$, 所以 $\vec{n} = (\sqrt{3}, -1, 0)$, 因为 $\vec{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{n}$, 所以 $CD \perp$ 平面 ABD , 选项 C 正确;

对于 D , 若 $AB \perp$ 平面 ACD , 则 AB 垂直于平面 ACD 内的所有直线, 即 $AB \perp AC$, 且 $AB \perp AD$, 此时 A 是 C 、 D 在 AB 上的垂足,

$\angle CAD$ 是二面角 $C-AB-D$ 的平面角, 即 $\angle CAD = 60^\circ$, $AC \perp AD$ 不成立, 选项 D 错误。

故选: BC 。

【知识点】该题以空间中两动点到定直线的距离为约束构造几何模型, 通过建立坐标系参数化表达点坐标后逐一验证四个命题, 综合考核空间想象力和演绎推理能力, 属中等难度。

(多选) 11. (6 分) 已知圆 $C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$, 圆 $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$, 圆 $C_3: x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$, 直线 $l: y = kx + b$ 与 C_1, C_2, C_3 均有两个交点. 记 l 被 C_1, C_2, C_3 截得的弦长分别为 s_1, s_2, s_3 , 则 ()

A. k 可以取任意实数

B. 满足 $s_1 = s_2 = s_3$ 的直线 l 共有 3 条

C. 满足 $s_1 + s_2 + s_3 = 3$ 的直线 l 多于 3 条

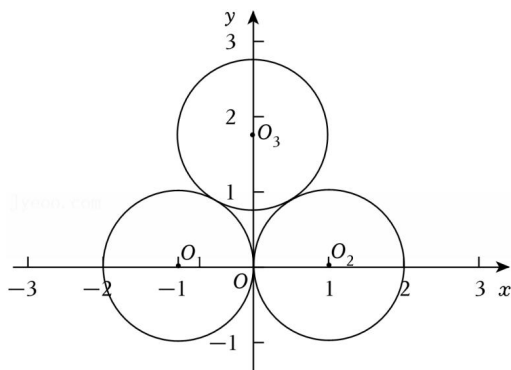
D. 当 $b = 0$ 时, $s_1 + s_2 + s_3$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

【分析】A：当直线垂直于任意两个圆心连线时，该直线无法同时与三个圆均有两个交点，由此排除某些 k 值；B：利用垂径定理将弦长表示为圆心到直线距离的函数，令三个弦长相等解出参数以确定直线条数；C：固定 $b=0$ 代入弦长和的函数表达式，解关于中间变量的二次方程确定 k 值；D：对弦长和函数求导数分析单调性，找出最大值点并计算最大值。

【解答】详细求解过程如下：令三圆圆心分别为 O_1, O_2, O_3 ，三个圆心到直线 l 的距离分别为 d_1, d_2, d_3 ，

由三圆方程可知， $O_1(-1, 0), O_2(1, 0), O_3(0, \sqrt{3})$ ，半径 r 均为 1，

如图：



由直线与圆的位置关系可知，当直线 $l \perp O_1O_2$ 或 $l \perp O_2O_3$ ，或 $l \perp O_1O_3$ 时，直线 l 不可能同时与三圆有两个交点，

$\therefore k \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故 A 错误；

由垂径定理可知， $r^2 = \left(\frac{s_i}{2}\right)^2 + d_i^2, i=1, 2, 3$ ，

$$\therefore s_i = 2\sqrt{r^2 - d_i^2}, i=1, 2, 3,$$

$\therefore$ 当 $s_1 = s_2 = s_3$ 时， $d_1 = d_2 = d_3$ ，

$$\therefore \frac{|-k+b|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{|k+b|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{|b-\sqrt{3}|}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\therefore |-k+b| = |k+b| = |b-\sqrt{3}|,$$

$\therefore k=0$ 或 $b=0$ ，

当 $k=0$ 时， $b = \sqrt{3} - b$ ，

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

当 $b=0$ 时， $|k| = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore k = \pm \sqrt{3},$$

$\therefore$ 直线 l 共有三条, 故 B 正确;

$$\text{当 } b=0 \text{ 时, } d_1=d_2=\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}, \quad d_3=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\therefore s_1=s_2=2\sqrt{1-\frac{k^2}{1+k^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}, \quad s_3=2\sqrt{1-\frac{3}{1+k^2}},$$

$$\therefore s_1+s_2+s_3=\frac{4}{\sqrt{1+k^2}}+2\sqrt{1-\frac{3}{1+k^2}},$$

$$\text{令 } \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}=t, \text{ 则 } s_1+s_2+s_3=4t+2\sqrt{1-3t^2},$$

$$\text{令 } f(t)=4t+2\sqrt{1-3t^2},$$

$\therefore$ 直线 l 与三圆有两个交点,

$$\therefore d_1 < r, \quad d_2 < r, \quad d_3 < r,$$

$$\therefore \sqrt{3}t < 1,$$

$$\therefore 0 < t < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{当 } f(t)=3 \text{ 时, } 4t+2\sqrt{1-3t^2}=3,$$

$$\text{整理得: } 28t^2-24t+5=0,$$

$$\text{解得: } t=\frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{5}{14}, \text{ 均符合题意,}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{5}{14},$$

$$\therefore k=\pm\sqrt{3} \text{ 或 } \pm\frac{\sqrt{171}}{5},$$

$\therefore$ 直线 l 至少有 4 条, 故 C 正确;

$$\text{令 } f'(t)=4+2\times\frac{1}{2}\times\frac{-6t}{\sqrt{1-3t^2}}=4-\frac{6t}{\sqrt{1-3t^2}}=0,$$

$$\text{解得: } t=\frac{2}{\sqrt{21}}<\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{当 } t=\frac{2}{\sqrt{21}} \text{ 时, } f(t) \text{ 有最大值, } f\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right)=\frac{8}{\sqrt{21}}+2\sqrt{1-3\times\frac{4}{21}}=\frac{8\sqrt{21}}{21}+\frac{2\sqrt{21}}{7}=\frac{2\sqrt{21}}{3}, \text{ 故 } D \text{ 正确.}$$

故选: BCD .

【知识点】该题以三条圆公共弦长为研究对象, 深度融合了直线与圆相交的弦长计算、方程求根以及函数最值分析等多个核心知识模块, 属于解析几何中复杂度较高的综合问题.

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. (5 分) 双曲线 $5x^2-6y^2=1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{66}}{6}$.

【分析】将方程 $5x^2-6y^2=1$ 两边同除以 1 化为 $x^2/(1/5)-y^2/(1/6)=1$ 的标准形式, 此时 $a^2=1/5$, $b^2=1/6$; 由双

曲线的基本关系 $c^2=a^2+b^2$ 算出 c^2 ，最后代入离心率公式 $e=c/a$ 即得结果.

【解答】详细求解过程如下：将双曲线 $5x^2 - 6y^2 = 1$ 化为标准方程求得：1，

$$\text{所以 } a^2 = \frac{1}{5}, \quad b^2 = \frac{1}{6}, \quad c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30},$$

$$\text{所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\frac{11}{30}}{\frac{1}{5}}} = \sqrt{\frac{11}{6}} = \frac{\sqrt{66}}{6}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{66}}{6}.$$

【知识点】该题考核将双曲线方程化为标准形式后用基本关系式 $c^2=a^2+b^2$ 求离心率的标准流程，属基础运算题.

13. (5 分) 已知 $f(x) = 2\sin(ax + \theta)$ ($a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \theta < 2\pi$) 是偶函数, $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增, 则

$$\theta = \underline{-\frac{3\pi}{2}}, \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \underline{1}.$$

【分析】由 $f(x) = 2\sin(ax + \theta)$ 是偶函数, 且 $0 \leq \theta < 2\pi$, 得 θ 或, 再根据 θ 时 $f(0) = 2$ 是最大值, 不满足函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增, θ 时 $f(0) = -2$ 是最小值, 利用 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增求得 $a = 2$ 或 1 , 由此求得 $f(\frac{2\pi}{3})$ 的值.

【解答】详细求解过程如下：鉴于 $f(x) = 2\sin(ax + \theta)$ ($a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \theta < 2\pi$) 是偶函数, 因而 θ 或 θ ,

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(0) = 2\sin(0 + \frac{\pi}{2}) = 2$, 是最大值, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上不是单调递增, 不合题意;

当 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 时, $f(0) = 2\sin(0 + \frac{3\pi}{2}) = -2$, 是最小值, 由 $f(x) = 2\sin(ax + \frac{3\pi}{2}) = -2\cos ax$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增,

所以周期需满足 $|a| \cdot \frac{\pi}{2} \leq \pi$, 即 $|a| \leq 2$, 因为 $a \in \mathbb{Z}$, 取 $a = 2$ 或 $a = 1$,

当 $a = 2$ 时, $f(\frac{2\pi}{3}) = -2\cos(2 \times \frac{2\pi}{3}) = -2\cos \frac{4\pi}{3} = -2 \times (-\frac{1}{2}) = 1$, 当 $a = 1$ 时, $f(\frac{2\pi}{3}) = -2\cos \frac{2\pi}{3} = -2 \times (-\frac{1}{2}) = 1$;

综上, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $f(\frac{2\pi}{3}) = 1$.

$$\text{故答案为: } \frac{3\pi}{2}; 1.$$

【知识点】该题通过对含参数的正弦型函数施加奇偶性与单调性双重约束来反推参数取值, 综合考核三角函数图像变换和性质判断, 难度为中等.

14. (5 分) 设实数 q 满足: 存在数列 $\{a_n\}$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{3n} = n^2 + n$, 且 $\{a_n\}$ 中有某

连续 9 项 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+8}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 q 的最大值为 $\underline{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}$.

【分析】由 $S_{3n} = n^2 + n$ 推出相邻三个连续项之和的形式为 $2n+2$ ；而在长度为 9 的等比数列子段中必定包含至少两组完整的这样的三连项，据此建立公比 q^3 与相邻三组项之和的比值关系，再依据正整数的限制确定 n 的取值范围，最终得到 q 所能达到的上确界。

【解答】详细求解过程如下：令数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，那么 $S_{3n} = n^2 + n$ ，

$$\therefore a_{3n+1} + a_{3n+2} + a_{3n+3} = S_{3n+3} - S_{3n} = (n+1)^2 + (n+1) - n^2 - n = 2n+2,$$

$\therefore$ 连续 9 项为等比数列，

$\therefore$ 9 项内一定有两组 $\{a_{3n+1}, a_{3n+2}, a_{3n+3}\}$ ，且两组相邻，

$$\therefore q^3 = \frac{a_{3n+4} + a_{3n+5} + a_{3n+6}}{a_{3n+1} + a_{3n+2} + a_{3n+3}} = \frac{2(n+1)+2}{2n+2} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

若这连续 9 项中存在三组 $\{a_{3n+1}, a_{3n+2}, a_{3n+3}\}$ ，

那么， $q^3 = 1 + \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+2}$ ， n 无解，

$\therefore$ 这连续 9 项不可能存在三组完整的 $\{a_{3n+1}, a_{3n+2}, a_{3n+3}\}$ ，

$\therefore n \geq 1$ ，

$$\therefore q^3 \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore q \text{ 的最大值为 } \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

故答案为： $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ 。

【知识点】该题通过前 n 项和表达式隐式定义数列，要求从长度为 9 的等比子列中反推公比的上确界，

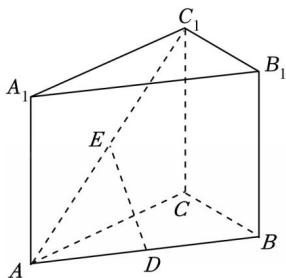
解题核心在于利用和式递推关系将连续三项和与等比性质建立联系，属中档题。

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， D ， E 分别为 AB ， AC_1 的中点。

(1) 证明： $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ；

(2) 设 $CC_1 = 2$ ，直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 45° ，求直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离。



【分析】(1) 连接 BC_1 后, 在 $\triangle ABC_1$ 中 D 为 AB 中点、 E 为 AC_1 中点, 由三角形中位线定理知 $DE \parallel BC_1$; 而 DE 不在平面 BCC_1B_1 内, BC_1 在此平面内, 恰好满足线面平行判定定理的两个条件, 故 $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .

(2) 由直线与平面所成角的定义求得 $BC=2$, 再由点到平面的距离求法即可求得.

【解答】详细求解过程如下: 第一小题, 以下给出严格证明: 连接 BC_1 ,

因为 D, E 分别为 AB, AC_1 的中点,

所以 $DE \parallel BC_1$,

因为 $DE \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 , $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 由 (1) 知, $DE \parallel BC_1$,

所以直线 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角等于直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角,

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC ,

因为 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $CC_1 \perp BC$,

因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $AC \perp BC$,

因为 $AC \cap CC_1 = C$, $CC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $\angle BC_1C$ 即为直线 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角,

因为直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 45° , 所以 $\angle BC_1C = 45^\circ$,

在 $Rt\triangle BC_1C$ 中, $CC_1 = 2$, 所以 $BC = 2$,

由 (1) 知, $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 D 到平面 BCC_1B_1 的距离即为直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离,

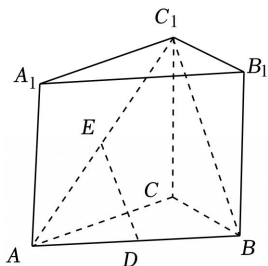
因为 D 为 AB 的中点, 所以 D 到平面 BCC_1B_1 的距离等于点 A 到平面 BCC_1B_1 的距离的 $\frac{1}{2}$.

因为 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 所以 $\triangle ABC$ 是腰长为 2 的等腰直角三角形, 且 $AC \perp BC$,

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 平面 $ABC \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = BC$, $AC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以点 A 到平面 BCC_1B_1 的距离为 $AC = BC = 2$,

所以直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.



【知识点】该题以直三棱柱为几何载体，综合考核了空间线面平行关系的逻辑论证、线面角与三角形内角之间的合理转化以及空间中点到平面距离的间接计算方法，属中等难度。

16. (15 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $BC=2\sqrt{3}$, $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求 $\cos A$;

(2) 设 D, E 两点满足: D 在 BA 的延长线上, $DE \parallel BC$, $AE \perp AC$. 若 $DE=\sqrt{6}$, 求 CE .

【分析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中已知两边 $AB=3$ 、 $BC=2\sqrt{3}$ 及其夹角 B 的余弦值 $\cos B=\sqrt{3}/3$, 由余弦定理 $AC^2=AB^2+BC^2-2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B=9+12-12=9$, 故 $AC=3$; 进而利用 $\cos A=(AB^2+AC^2-BC^2)/(2 \cdot AB \cdot AC)=(9+9-12)/(2 \cdot 3 \cdot 3)=1/3$.

(2) 由 $\angle DAE$ 与 $\angle BAC$ 互余, 算出 $\sin \angle DAE=\cos \angle BAC=\frac{1}{3}$, 根据 $DE \parallel BC$, 算出 $\angle D$ 与 $\angle ABC$ 互补, 从而可得 $\cos D=-\cos \angle ABC=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 结合同角三角函数的平方关系算出 $\sin D$, 然后在 $\triangle ADE$ 中运用正弦定理算出 AE 的长, 进而在 $\text{Rt} \triangle ACE$ 中运用勾股定理求解, 可得 CE 的长.

【解答】从已知条件可以直接写出: 详细求解过程如下: 第一小题, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $BC=2$, $\cos B$, 此结论对后续步骤至关重要.

由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB \cdot BC \cos B$

$$=9+12-2 \times 3 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}=9, \text{ 解得 } AC=3,$$

$$\text{所以 } \cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB \cdot AC}=\frac{9+9-12}{2 \times 3 \times 3}=\frac{1}{3};$$

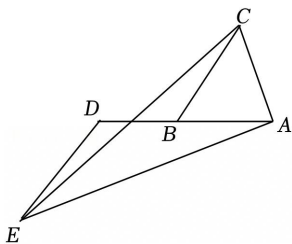
(2) 由 $AE \perp AC$, 可得 $\angle DAE=90^\circ - \angle BAC$, 故 $\sin \angle DAE=\cos \angle BAC=\frac{1}{3}$,

根据 $DE \parallel BC$, 可得 $\angle D=\angle DBC=180^\circ - \angle ABC$, 故 $\cos D=-\cos \angle ABC=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\text{所以 } \sin D=\sqrt{1-\cos^2 D}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

在 $\triangle ADE$ 中, 由正弦定理得 $\frac{DE}{\sin \angle DAE}=\frac{AE}{\sin D}$, 即 $\frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{AE}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$, 解得 $AE=6$,

Rt $\triangle ACE$ 中, $CE = \sqrt{AE'^2 + AC'^2} = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$.



【知识点】该题以平面三角形为基本图形, 将正余弦定理、诱导公式以及同角三角函数关系等三角学核心工具有机融合, 全面考核了代数运算与几何推理的综合能力, 属中档题型.

17. (15 分) 设整数 $N \geq 2$, 某同学用一个球进行投篮练习, 至多投篮 N 次, 当且仅当投中 1 次时或 N 次均未投中时, 停止练习. 设该同学每次投中的概率为 p ($0 < p < 1$), 各次投中与否相互独立. 记 X 为停止练习时该同学的投篮次数.

(1) 当 $N=4$, $p=\frac{1}{3}$ 时, 求 X 的分布列;

(2) 设 k, m 均为自然数.

(i) 当 $k \leq N-1$ 时, 求 $P(X > k)$;

(ii) 当 $k+m \leq N-1$ 时, 证明: $P(X > k+m | X > k) = P(X > m)$.

【分析】(1) 当 $N=4$ 且 $p=1/2$ 时, $X=1$ 对应首次即命中 (概率 $1/2$); $X=2$ 对应首次未中、第二次命中 (概率 $1/4$); $X=3$ 对应前两次未中、第三次命中 (概率 $1/8$); $X=4$ 包含前三次未中且第四次命中或四次全部未中两种情况 (概率各 $1/16$, 合计 $1/8$). 验证概率和为 1 后列出分布列.

(2) (i) 利用独立事件的概率公式求解;

(i) 利用条件概率公式求解.

【解答】详细求解过程如下: 第一小题, 从题意不难发现, X 的所有可能取值为 1, 2, 3, 4,

则 $P(X=1) = \frac{1}{3}$, $P(X=2) = (1 - \frac{1}{3}) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, $P(X=3) = (1 - \frac{1}{3})^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$, $P(X=4) = (1 - \frac{1}{3})^3 = \frac{8}{27}$,

所以 X 的分布列为:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

(2) (i) 当 $k \leq N-1$ 时, $X > k$ 说明前 k 次投篮均未投中,

则 $P(X > k) = (1-p)^k$;

(ii) 证明: 当 $k+m \leq N-1$ 时, $P(X > k+m | X > k)$ 表示前 k 次投篮均未投中的条件下前 $k+m$ 次投篮也均未投中的概率,

即前 k 次投篮均未投中的条件下第 $k+1$ 次到第 $k+m$ 次也均未投中的概率,

所以 $P(X > k+m | X > k) = (1-p)^m$,

又因为 $P(X > m) = (1-p)^m$,

所以 $P(X > k+m | X > k) = P(X > m)$.

【知识点】该题以一个带有终止条件的投篮练习为概率模型, 要求建立停止投篮次数这一随机变量的分布列并验证其无记忆性条件概率性质, 属中等难度的概率统计应用题.

18. (17 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 $F(-1, 0)$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 与 C 交于 P, Q 两点. 其中 Q 在第三象限, 直线 PO 与 C 的另一个交点为 R .

(i) 若 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积的 3 倍, 求 l 的方程;

(ii) 求 $\tan \angle PQR$ 的最小值.

【分析】(1) 由左焦点 $F(-1, 0)$ 知半焦距 $c=1$; 离心率 $e=c/a=1/2$ 给出长半轴 $a=2$; 椭圆中 $b^2=a^2-c^2=4-1=3$, 于是标准方程为 $x^2/4+y^2/3=1$.

(2) (i) 假设 PQ 的方程, 根据对称性得出 PF 和 QF 的关系, 然后根据坐标关系以及韦达定理求解即可;

(ii) 求出 QR 的斜率, 根据斜率与倾斜角以及正切的和差公式求解, 最后根据基本不等式求解最小值即可.

【解答】根据前述条件不难写出: 详细求解过程如下: 第一小题, $\because F(-1, 0)$, e , 这一步是后续推导的基础.

$$\therefore c=1, a=2,$$

$$\therefore b^2=a^2-c^2=3,$$

$$\therefore C \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;$$

(2) 设直线 l 的方程为: $y=k(x+1)$ ($k>0$), $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

$$\text{联立直线 } l \text{ 与椭圆 } C: \begin{cases} y=k(x+1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

$$\text{整理得: } (3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-12=0,$$

$$\text{由韦达定理得: } x_1+x_2=\frac{-8k^2}{3+4k^2}, \quad x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2},$$

由椭圆的对称性可知, R 与 P 关于点 O 对称,

$$\therefore R(-x_1, -y_1),$$

$$(i) \because OP=OR,$$

$$\therefore S_{\triangle PFR}=2S_{\triangle PFO},$$

$\therefore \triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积 3 倍,

$$\therefore \frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle PFR}} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{PF}{QF} = 2,$$

$$\therefore \frac{y_1}{-y_2} = \frac{|x_1+1|}{|x_2+1|} = 2,$$

$$\therefore y_1 = -2y_2, \quad (x_1+1) = -2(x_2+1),$$

$$\therefore x_1 = -2x_2 - 3,$$

$$\therefore x_1+x_2 = \frac{-8k^2}{3+4k^2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{9-4k^2}{3+4k^2}, \quad x_2 = -\frac{9+4k^2}{3+4k^2},$$

$$\therefore x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2},$$

$$\therefore \frac{16k^4-81}{(3+4k^2)^2} = \frac{4k^2-12}{3+4k^2},$$

$$\text{解得: } k^2 = \frac{5}{4},$$

$$\therefore k > 0,$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \text{直线 } l: y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x+1), \text{ 即 } \sqrt{5}x - 2y + \sqrt{5} = 0;$$

$$(ii) k_{QR} = \frac{y_2 - (-y_1)}{x_2 - (-x_1)} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{k(x_1 + x_2 + 2)}{x_1 + x_2} = k + \frac{2k}{x_1 + x_2} = k + \frac{2(3+4k^2)}{-8k} = -\frac{3}{4k},$$

$$\therefore \tan \angle PQR = \frac{k_{PQ} - k_{QR}}{1 + k_{PQ} \cdot k_{QR}} = \frac{k + \frac{3}{4k}}{1 - \frac{3}{4}} = 4k + \frac{3}{k} \geq 2\sqrt{4k \cdot \frac{3}{k}} = 4\sqrt{3}, \text{ 当且仅当 } 4k = \frac{3}{k} \text{ 时, 等号成立,}$$

此时, $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 符合题意;

故 $\tan \angle PQR$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$.

【知识点】 该题将椭圆标准方程、直线与椭圆联立、韦达定理、对称性质以及函数不等式等多个核心知

识技艺编织成多层次综合问题，对代数运算能力和几何直观洞察力均有很高要求，属高难度题型.

19. (17 分) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且当 $x < 0$ 时， $f(x) = 2^x$ ，对任意 $x_0 \in \mathbf{R}$ ，定义集合 $D(x_0) = \{d \in \mathbf{R} | f(x_0 + d) > f(x_0)\}$.

(1) 若当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 1 - x$ ，求 $D(-1)$ ；

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数， $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，且 $x_1 x_2 \neq 0$ ，证明： $D(x_2) \subseteq D(x_1)$ ；

(3) 设 $f(x)$ 满足：①若 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，则 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$ ；②当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) < f(0)$.

(i) 证明： $f(0) \geq 1$ ；

(ii) 证明： $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增.

【分析】(1) $x < 0$ 时 $f(x) = 2^x$ ，因此 $f(-1) = 1/2$ ；不等式 $f(d-1) > 1/2$ 的解需按 $d-1 < 0$ 和 $d-1 \geq 0$ 分两种情况讨论，合并两部分解集即得 $D(-1)$.

(2) 根据奇函数的定义，求出 $f(x)$ 的表达式，然后结合 $D(x)$ 的定义，根据 x_1, x_2 的正负分类讨论即可；

(3) (i) 采用反证法，构造 x 取值，既满足条件①，又满足条件②，利用条件矛盾求证即可；

(ii) 先利用反证法证明 $x > 0$ 时， $f(x) \leq 0$ ，然后构造函数满足增函数的定义即可证明.

【解答】依题目所给信息可得：第一小题，详细求解过程如下： $f(-1) = 2^{-1}$ ，这一步是后续推导的基础。

$$\therefore D(-1) = \{d | f(d-1) > \frac{1}{2}\},$$

$$\text{当 } d < 1 \text{ 时, } f(d-1) = 2^{d-1} > 2^{-1},$$

$$\therefore d-1 > -1,$$

$$\therefore d > 0,$$

$$\text{当 } d \geq 1 \text{ 时, } f(d-1) = 1 - (d-1) = 2-d > \frac{1}{2},$$

$$\therefore d < \frac{3}{2},$$

$$\therefore D(-1) = \{d | 0 < d < \frac{3}{2}\};$$

(2) 证明： $\because f(x)$ 为奇函数，

$$\therefore f(0) = 0, x > 0 \text{ 时, } f(x) = -f(-x) = -2^{-x},$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -2^{-x}, & x > 0 \end{cases},$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) \in (0, 1), D(x) = \{d | f(x+d) > f(x) = 2^x\},$$

$$\therefore 2^{x+d} > 2^x,$$

$$\therefore x < x+d < 0,$$

$$\therefore 0 < d < -x,$$

$$\therefore D(x) = (0, -x),$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) \in (-1, 0), D(x) = \{d | f(x+d) > f(x) = -2^{-x}\},$$

$$\therefore x+d > 0 \text{ 时, } -2^{-x-d} > 2^{-x}, x+d \leq 0 \text{ 时, 恒成立,}$$

$$\therefore d > 0 \text{ 或 } d \leq -x,$$

$$\therefore D(x) = (-\infty, -x] \cup (0, +\infty),$$

$$\because f(x_1) \leq f(x_2), \text{ 且 } x_1 x_2 \neq 0,$$

$$\textcircled{1} x_1 < 0, x_2 < 0 \text{ 时, } 2^{x_1} \leq 2^{x_2},$$

$$\therefore x_1 \leq x_2 < 0,$$

$$\therefore D(x_1) = (0, -x_1) \supseteq D(x_2) = (0, -x_2);$$

$$\textcircled{2} x_1 > 0, x_2 > 0 \text{ 时, } -2^{-x_1} \leq -2^{-x_2},$$

$$\therefore -x_1 \geq -x_2,$$

$$\therefore 0 < x_1 \leq x_2,$$

$$\therefore D(x_1) = (-\infty, -x_1] \cup (0, +\infty), D(x_2) = (-\infty, -x_2] \cup (0, +\infty),$$

$$\therefore (-\infty, -x_1] \supseteq (-\infty, -x_2],$$

$$\therefore D(x_1) \supseteq D(x_2),$$

$$\textcircled{3} x_1 < 0 < x_2 \text{ 时, } f(x_1) > 0 > f(x_2), \text{ 不符合题意;}$$

$$\textcircled{4} x_2 < 0 < x_1 \text{ 时, } f(x_2) > 0 > f(x_1) \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore D(x_1) = (-\infty, -x_1] \cup (0, +\infty), D(x_2) = (0, -x_2),$$

$$\therefore (0, +\infty) \supseteq (0, -x_2),$$

$$\therefore D(x_1) \supseteq D(x_2),$$

$$\text{综上所述, } D(x_2) \subseteq D(x_1);$$

$$(3) (i) \text{ 证明: 假设 } f(0) < 1,$$

$$\therefore x < 0 \text{ 时, } f(x) = 2^x \in (0, 1),$$

$$\therefore \text{存在 } x_0 \in (-2, 0), \text{ 使得 } f(x_0) > f(0),$$

$$\therefore D(0) \supseteq D(x_0),$$

$$\text{令 } d = -\frac{x_0}{2}, \text{ 则 } x_0 + d = \frac{x_0}{2} < 0,$$

$$\therefore f(x_0+d) = 2^{x_0+d} > 2^{x_0} = f(x_0),$$

$$\therefore d \in D(x_0),$$

$$\because x_0 \in (-2, 0),$$

$$\therefore d \in (0, 1),$$

$$\therefore f(d) < f(0), \text{ 即 } f(0+d) < f(0),$$

$$\therefore d \notin D(0), \text{ 与 } D(0) \supseteq D(x_0) \text{ 矛盾,}$$

$$\therefore f(0) \geq 1;$$

$$(ii) \text{ 证明: 取 } 0 < t < 1, \text{ 则 } f(t) < f(0) = 1 + (-t),$$

$$\therefore -t \in D(t),$$

$$\text{假设存在 } a \in (-\infty, 0), \text{ 使得 } f(a) < f(t),$$

$$\therefore D(a) \supseteq D(t),$$

$$\therefore -t \in D(a),$$

$$\therefore f(a-t) > f(a),$$

$$\text{即 } 2^{a-t} > 2^a,$$

$$\therefore a-t > a,$$

$$\therefore t < 0, \text{ 与 } 0 < t < 1 \text{ 矛盾,}$$

$$\therefore \text{不存在 } a \in (-\infty, 0), \text{ 使得 } f(a) < f(t),$$

$$\text{即 } x \in (0, 1) \text{ 时, } f(x) \leq 0,$$

$$\text{取 } y \geq 1, \text{ 假设存在 } b \in (-\infty, 0), \text{ 使得 } f(b) < f(y),$$

$$\therefore f[b+(y-b)] = f(y) > f(b),$$

$$\therefore y-b \in D(b),$$

$$\text{令 } c = \frac{1}{2} - (y-b),$$

$$\because y \geq 1, b < 0,$$

$$\therefore y-b > 1,$$

$$\therefore c < -\frac{1}{2} < b < 0,$$

$$\therefore f(c) = 2^c < 2^b = f(b),$$

$$\therefore D(c) \supseteq D(b),$$

$$\therefore y-b \in D(c),$$

$$\therefore f(c+y-b) = f\left(\frac{1}{2}\right) > f(c),$$

$$\because \frac{1}{2} \in (0, 1), c < 0,$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0, f(c) > 0, \text{ 与 } f\left(\frac{1}{2}\right) > f(c) \text{ 矛盾,}$$

$$\therefore \text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) \leq 0,$$

$$\text{取 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 则 } x_2 - x_1 > 0,$$

$$\therefore -(x_2 - x_1) - 1 < -1 < 0,$$

$$\therefore f[-(x_2 - x_1) - 1] > 0,$$

$$\therefore f(x_1) \leq 0,$$

$$\therefore f(x_1) < f[-(x_2 - x_1) - 1],$$

$$\therefore D(x_1) \supseteq D[-(x_2 - x_1) - 1],$$

$$\therefore -(x_2 - x_1) - 1 < -1 < 0,$$

$$\therefore f[-(x_2 - x_1) - 1] < f(-1) = f[-(x_2 - x_1) - 1 + (x_2 - x_1)],$$

$$\therefore x_2 - x_1 \in D[-(x_2 - x_1) - 1],$$

$$\therefore x_2 - x_1 \in D(x_1),$$

$$\therefore f(x_1 + x_2 - x_1) > f(x_1),$$

$$\text{即 } f(x_2) > f(x_1),$$

$$\therefore 0 < x_1 < x_2,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在区间 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增.}$$

【知识点】 该题以抽象函数自定义新集合 $D(x_0)$ 为创新考查框架，将函数的单调性判别、不等式证明与反证法等逻辑推理工具深度融合，解题关键在于巧妙地构造辅助自变量来制造矛盾，属较高难度的函数与逻辑综合题.